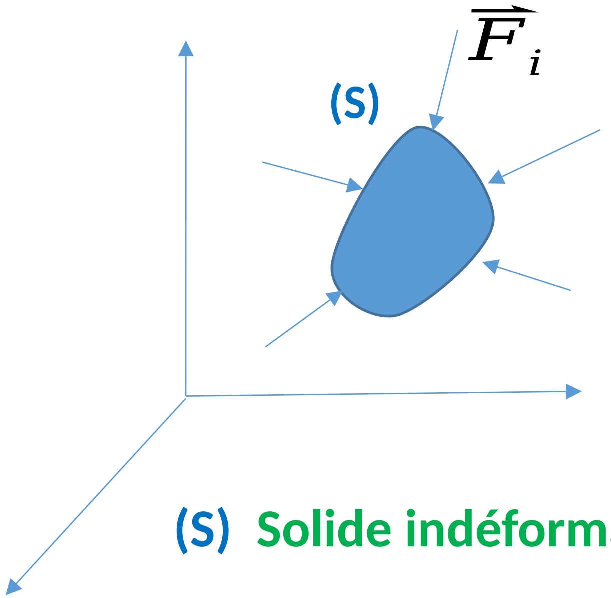
LES TORSEURS

Le torseur est l'outil mathématique le plus privilégié en mécanique des solides indéformables



(S) Solide indéformable

* Chaque force élémentaire $\vec{F}_i$ va engendrer un moment élémentaire $\vec{M}_i$

* Le solide (S) aura, dans le cas général, un mouvement de translation et un mouvement de rotation

* Donc l'outil mathématique qui décrit le mouvement du solide (S) dans l'espace s'appelle le **TORSEUR**, noté:

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = & \text{Résultante des efforts (Forces) (N)} \\ \vec{M}_A = & \text{Moment resultant (N.m)} \end{cases}$$

$A \in (S)$

Le torseur

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = & \text{Résultante des efforts (Forces) (N)} \\ \overrightarrow{M_A} = & \text{Moment resultant (N.m)} \end{cases}$$

Un torseur que nous noterons $[T]$ est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique et ayant les propriétés suivantes :

a) Le premier champ de vecteurs fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur $\vec{R}$ indépendant du point A et appelé résultante du torseur $[T]$;

b) Le second champ de vecteur fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur $\overrightarrow{M_A}$ qui dépend du point A. Le vecteur $\overrightarrow{M_A}$ est appelé moment au point A du torseur $[T]$.

Le torseur

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = & \text{Résultante des efforts (Forces) (N)} \\ \overrightarrow{M}_A = & \text{Moment resultant (N.m)} \end{cases}$$

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{M}_A$ sont appelés les éléments de réduction du torseur ou ses coordonnées

Connaissant le Torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F_i} \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{AB_i} \wedge \vec{F_i} \end{cases}$ en un point A de l'espace nous pouvons

déterminer les éléments de réduction de ce même torseur en un autre point C de l'espace.

Le moment au point C s'exprime en fonction du moment au point A , de la résultante $\vec{R}$ et

du vecteur $\vec{CA}$. Nous avons en effet :

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{CB_i} \wedge \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{CA} + \vec{AB_i}) \wedge \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{CA} \wedge \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{AB_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{CA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{AB_i} \wedge \vec{F_i}$$

$$\vec{M}_C = \vec{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A$$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R}$$

La formule de transport des moments

La relation fondamental des torseurs

Cette relation très importante en mécanique permet de déterminer le moment en un point C en connaissant le moment au point A.

Opérations vectorielles sur les torseu

Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux (équivalents), si et seulement si, il existe un point de l'espace en lequel les éléments de réduction sont respectivement égaux entre eux

Soient deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ tel que : $[T_1]_P = [T_2]_P$ égaux au point P

cette égalité se traduit par deux égalités vectorielles $[T_1]_P = [T_2]_P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_{1P} = \overrightarrow{M}_{2P} \end{cases}$

Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est un torseur $[T]$ dont les éléments de réduction

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_P}$ sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs.

$$[T]_P = [T_1]_P + [T_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad [T]_P = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_{1P}} + \overrightarrow{M_{2P}} \end{cases}$$

Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$\text{Si} \quad [T]_P = \lambda\ [T_1]_P \quad \Leftrightarrow \quad [T]_P = \begin{cases} \vec{R} = \lambda\ \vec{R_1} \\ \overrightarrow{M_P} = \lambda\ \overrightarrow{M_{1P}} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in IR$$

Torseur nul

Le torseur nul, noté $[0]$ est l'élément neutre pour l'addition de deux torseurs. Ses éléments de réduction sont nuls en tout point de l'espace.

$$[0] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_P = \vec{0} \qquad \forall P \in IR^3 \end{cases}$$

Invariants du torseur

Définition

On appelle invariant d'un torseur $[T]_P$ toute grandeur indépendante du point de l'espace où elle est calculée.

Invariant vectorielle d'un torseur

La résultante $\vec{R}$ est un vecteur libre, indépendant du centre de réduction du torseur, elle constitue l'invariant vectorielle du torseur $[T]_P$

Invariant scalaire d'un torseur ou automoment

L'invariant scalaire d'un torseur donné, est par définition le produit scalaire des éléments de réductions en un point quelconque de ce torseur. $\boxed{\vec{R} \bullet \vec{M}_A}$

Le produit scalaire $\vec{R} \bullet \overrightarrow{M_A}$ est indépendant du point A

formule de transport : $\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}$

$$\overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \left(\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} \right) \bullet \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M_A} \bullet \vec{R} + \left(\overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} \right) \bullet \vec{R}$$

$$\overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M_A} \bullet \vec{R}$$

on voit bien que le produit scalaire, des deux éléments de réduction d'un torseur, est indépendant du point où est mesuré le moment.

Axe central d'un torseur

Soit un torseur donné de résultante non nulle

L'axe central (Δ) est défini par l'ensemble des points P de l'espace tel que le moment du torseur en ce point, soit parallèle à la résultante

$$\boxed{\forall\, P \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M}_P = \alpha\, \vec{R} \qquad \text{avec} \quad \alpha \in IR}$$

L'axe central d'un torseur est parallèle à la droite support de la résultante du torseur

Démonstration :

Soient P et P' deux points de l'axe central, nous pouvons écrire :

$\vec{M}_P = \alpha\,\vec{R}$ et $\vec{M}_{P'} = \alpha'\,\vec{R}$ car les deux moments sont parallèles à $\vec{R}$

et nous avons aussi par la formule de transport :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_{P'} + \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$$

$$\alpha\,\vec{R} = \alpha'\,\vec{R} + \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \alpha')\,\vec{R} = \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$$

Par définition le vecteur résultat de $\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{PP'}$ et $\vec{R}$ ou nul

La seule possibilité ici est, qu'il soit nul, alors dans ce cas : $\alpha = \alpha'$ et $\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PP'} \,//\, \vec{R}$: d'où l'axe central est parallèle à la résultante du torseur

Equation vectorielle de l'axe central

Soit O l'origine des coordonnées dans un repère orthonormé et (Δ) l'axe central d'un torseur $[T]$. Nous avons : $\forall P \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{M_P} = \lambda \vec{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_P} \,//\, \vec{R} \Rightarrow \overrightarrow{M_P} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

Et $\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_P} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

En utilisant la propriété du double produit vectoriel, on aboutit à :

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{PO}(\vec{R}^2) - \vec{R}\,(\vec{R} \bullet \overrightarrow{PO}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OP}(\vec{R}^2) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} - \vec{R}\,(\vec{R} \bullet \overrightarrow{PO}) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2} + \frac{(\vec{R} \bullet \overrightarrow{OP})}{\vec{R}^2}\vec{R}$$

$$\frac{(\vec{R} \bullet \overrightarrow{OP})}{\vec{R}^2} = \lambda \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2} + \lambda \vec{R}$$

Pas du torseur

Nous savons que pour tout point P de l'axe central nous avons : $\vec{M}_p = \lambda \vec{R}$

Le produit scalaire de cette expression par l'invariable vectorielle $\vec{R}$ donne :

$$\vec{M}_p \bullet \vec{R} = \lambda \vec{R} \bullet \vec{R} \qquad \text{d'où :} \quad \lambda = \frac{\vec{M}_p \bullet \vec{R}}{\vec{R}^2}$$

Comme le produit $\vec{M}_p \bullet \vec{R}$ est l'invariant scalaire du torseur, la valeur λ est indépendante du point P. λ est appelée ‘’ ***Pas du torseur*** ’’ elle n'est définie que si : $\vec{R} \neq \vec{0}$

Torseurs particuliers

Glisseur

Un torseur de résultante non nulle est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul. Cette définition peut se traduire par : $[T]$ est un glisseur $\Leftrightarrow \begin{cases} I[T] = \overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R} = 0 \quad \forall P, \\ avec \quad \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases}$

On sait que l'invariant scalaire est indépendant du point P où il est calculé. Comme la résultante n'est pas nulle alors on peut dire que : un torseur est un glisseur, si et seulement si, il existe au moins un point en lequel le moment du torseur est nul.

Torseur couple

Un torseur non nul est un torseur couple, si et seulement si, sa résultante est nulle.

Cette définition se traduire par : $[T]$ est un torseur couple $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \exists\ P \text{ tel que : } \overrightarrow{M_P} \neq \vec{0} \end{cases}$

Tableau récapitulatif sur les torseurs

Eléments de réduction au point *A*	**Construction minimum**	**Type de torseur**
$\vec{R} \neq \vec{0}$ $\vec{R} \cdot \overrightarrow{M_A} = \vec{0}$	Un vecteur lié unique	Torseur glisseur
$\vec{R} = \vec{0}$ $\overrightarrow{M_A} \neq \vec{0}$	Deux vecteurs liés formant un couple	Torseur couple
$\vec{R} \cdot \overrightarrow{M_A} \neq \vec{0}$	Un vecteur lié + 2 vecteurs liés formant un couple	Torseur quelconque
$\vec{R} = \vec{0}$ $\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$	Vecteurs nuls	Torseur nul